MÉTHODOLOGIE VI CORRECTION

INTÉGRATION.

L'objectif de ce travail est de passer en revue l'ensemble des méthodes qui permettent de calculer des intégrales ou, à défaut, de préciser leur nature (convergente ou divergente).

On suppose dans la suite que f est une fonction continue (donc intégrable sur les segments bornés où elle est définie).

Exercice 1.- ***Préliminaires.***
Partie I : calcul explicite.

Dans cette partie, on veut calculer explicitement une intégrale d'une fonction continue sur un segment borné (intégrale définie). Cela peut être utilisé directement dans ce cas mais aussi dans le cas d'une intégrale impropre (une intégrale impropre est une limite d'intégrales définies).

1. Reproduire (si possible de tête) le tableau des primitives usuelles. Ce tableau doit être connu par cœur et il faut s'entraîner à reconnaître les situations qui sont décrites dans ce tableau.
2. Énoncer la formule d'intégration par parties. Faire la liste des cas où on sait quelle fonction prendre pour u et quelle fonction prendre pour v' (règle du LPE,...).
3. Rappeler la formule de changement de variables. Savoir utiliser cette formule demande de la pratique.

Remarque. Attention à la rédaction dans le cas des changements de variables et des intégration par parties dans le cas des intégrales impropres : **on n'utilise ces formules que pour des intégrales définies.** Dans le cas d'une intégrale impropre, il faudra donc repasser par un sous-intervalle sur lequel la fonction à intégrer est définie puis passer à la limite sur les bornes de ce sous-intervalle.

Partie II : intégrales impropres.

1. Qu'appelle-t-on intégrale faussement impropre ?
2. Faire la liste des situations qui nécessitent une étude de convergence.
3. Il y a trois types d'intégrales de référence : intégrales de Riemann, intégrales de $e^{-\lambda t}$ et intégrale de Gauss. Quelle est la nature et la valeur (quand elle converge) de chacune de ces intégrales ? Attention les intégrales de Riemann nécessitent **deux** études de convergence.

Partie III : Nature des intégrales impropres.

1. Énoncer le critère de comparaison par équivalent.
2. Énoncer le critère de comparaison par majoration/minoration.
3. Énoncer le critère de comparaison par négligeabilité.

Correction 1.-
C'est du cours.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

Exercice 2.- *Calcul : primitives..*

1. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}dx.$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx.$
3. $\displaystyle\int_4^9 \sqrt{u}du.$
4. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^x\left(2e^x-1\right)^2 dx.$
5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln u}{u}du.$
6. $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x}\sqrt{x}dx.$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-\frac{t}{2}}dt.$

Correction 2.-

1. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(1-e^{-1}\right).$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\ln 2}{2}.$
3. $\displaystyle\int_4^9 \sqrt{u}du = \frac{38}{3}.$
4. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^x\left(2e^x-1\right)^2 dx = \frac{13}{3}.$
5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln u}{u}du = \frac{(\ln 2)^2}{2}.$
6. $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x}\sqrt{x}dx = 4-2\sqrt{2}.$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-\frac{t}{2}}dt = 2\ln 2.$

Exercice 3.- *Calcul : intégration par parties..*

1. $\displaystyle\int_1^e x^2\ln(x)dx.$
2. $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{-x}dx.$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx.$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-2x}dx.$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2}dx.$

Correction 3.-

1. $\displaystyle\int_1^e x^2\ln(x)dx = \frac{2e^3+1}{9}.$
2. $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{-x}dx = 2-5e^{-1}.$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx = 2.$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-2x}dx = \frac{1}{4}.$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$

Exercice 4.- *Calcul : changements de variables..*

1. $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx$ (poser $u=\sqrt{x}$).
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t+2\sqrt{t}}$ (poser $u=\sqrt{t}$).
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+e^t}}$ (poser $u = \sqrt{1+e^e}$).
4. $\displaystyle\int_0^3 \frac{t}{\sqrt{2t+3}}dt.$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t+1}.$

Correction 4.-

1. $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx = 2e^2.$
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t+2\sqrt{t}} = 2\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right).$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+e^t}} = .$
4. $\displaystyle\int_0^3 \frac{t}{\sqrt{2t+3}}dt = \sqrt{3}.$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t+1} = \ln(2).$

Exercice 5.- *Nature des intégrales..*

Repérer les points où les intégrales suivantes sont impropres puis décider de leur nature.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x-\sqrt{x^2+1}dx.$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^{-x}}dx.$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(x+1)^3}dx.$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx.$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx.$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}dx.$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx.$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+e^{-2x})dx.$
9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{t}}-1}{t}dt.$
10. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}dx.$

Correction 5.-

1. Intégrale impropre en $+\infty$. La fonction à intégrer est équivalente à $-\frac{1}{2x}$ en $+\infty$. Donc divergente par comparaison à une intégrale de Riemann.
2. Intégrale impropre en 0 et en $+\infty$. En 0, on utilise le fait que $\ln(x) = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ donc convergente en 0 par comparaison. À l'infini, la fonction est équivalente à l'infini à $\frac{\ln(x)}{x}$, lui-même supérieur à $\frac{1}{x}$. L'intégrale est donc divergente en $+\infty$ par comparaisons. Elle est donc divergente sur $\mathbb{R}_+$.
3. Intégrale impropre en 0 et en $+\infty$. La fonction à intégrer est équivalente à $\ln(x)$ en 0 donc l'intégrale est convergente en 0. À l'infini, la fonction à intégrer est équivalente à $\frac{\ln(x)}{x^3} = \underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc l'intégrale est convergente aussi en $+\infty$. Elle est donc convergente sur $\mathbb{R}_+$.
4. Impropre en 0 et en $+\infty$. La fonction est équivalente à $-\ln(x)$ en 0 donc convergente et à $\frac{\ln(x)}{x^2} = \underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ en $+\infty$ donc convergente aussi.
5. Impropre en $+\infty$ et la fonction est $\underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc l'intégrale est convergente.
6. Impropre en $+\infty$ et la fonction est $\underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc l'intégrale est convergente.
7. Impropre en $+\infty$. La fonction à intégrer est équivalente en $+\infty$ à $e^{-\frac{x}{2}}$ qui est convergente (intégrale de référence). Donc l'intégrale est convergente par comparaison.
8. Impropre en $+\infty$. La fonction à intégrer est équivalente en $+\infty$ à e^{-2x} qui est convergente (intégrale de référence). Donc l'intégrale est convergente par comparaison.
9. Impropre en 0. La fonction à intégrer est équivalente à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ en 0 qui est une fonction intégrable en 0. Donc l'intégrale est convergente.
10. Impropre en $+\infty$. La fonction à intégrer est supérieure à $\frac{1}{x}$ donc l'intégrale est divergente par comparaison.